LUCRUL MECANIC (L) - EXERCIȚII

$$\boxed{L_F = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

$$\boxed{L_F = (F\cos\alpha) \cdot d}$$

$$\boxed{L_{F_f} = -F_f \cdot d}$$

$$\boxed{L_G = \vec{G} \cdot \vec{h}}$$

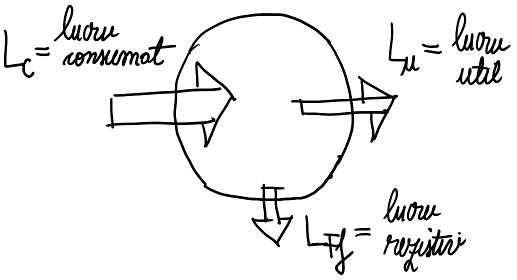
$$(MCU) \Rightarrow \boxed{L_{F_{cp}} = 0}$$

$$\boxed{L_{F_e} = \frac{-k \cdot \Delta l^2}{2}}$$

PUTEREA MECANICĂ (P) - EXERCIȚII

$$\boxed{P_m = \frac{L}{\Delta t}} \quad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}} \quad \boxed{P_m = F_m \cdot v_m}$$

RANDAMENTUL MECANIC (η) - EXERCIȚII



$$\boxed{\eta = \frac{L_u}{L_c}}$$

EXEMPLU: URCAREA UNIFORMĂ PE PLANUL ÎNCLINAT

$$\boxed{\eta = \frac{L_G}{L_F} = \frac{L_G}{L_G + |L_{F_f}|} = \frac{1}{1+\mu \operatorname{ctg}\alpha}}$$

1. O mașină de spălat cu masa $m=80kg$ se deplasează orizontal uniform cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0{,}1$, pe distanța $d=30m$ sub acțiunea unei forțe orizontale de împingere. Să se afle:

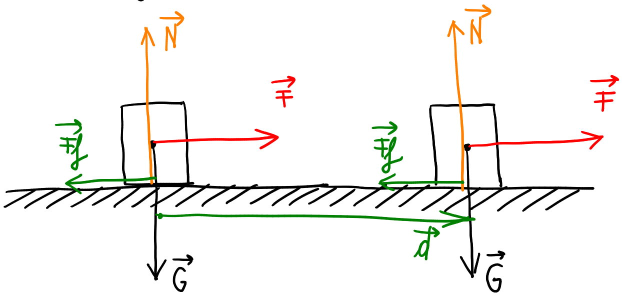
a) lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a mașinii

b) lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune

c) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare și să se compare cu lucrul mecanic al forței de tracțiune

$m=80kg$
$\mu=0{,}1$
$d=30m$

a) $L_G=?$
b) $L_F=?$
c) $L_{Ff}=?$



a) $L_G=\vec{G}\cdot\vec{d}=G\cdot d\cdot \cancel{\cos 90}^{0}=0\,J$

b) $L_F=\vec{F}\cdot\vec{d}=F\cdot d\cdot \cancel{\cos 0}^{1}=F\cdot d$, dar Principiul II: $F-F_f=0$ (MRU) $\Rightarrow F=F_f=\mu m g$

$L_F=\mu m g d=0{,}1\cdot 80\cdot 10\cdot 30=2400\,J$

c) $L_{Ff}=\vec{F_f}\cdot\vec{d}=F_f\cdot d\cdot \cancel{\cos 180}^{-1}=-F_f\cdot d$

$=-\mu m g d=-0{,}1\cdot 80\cdot 10\cdot 30=-2400\,J$

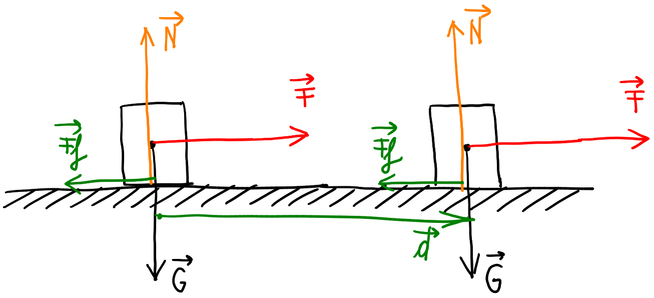
② Un corp cu masa $m = 500g$ se deplasează cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}1$, sub acțiunea unei forțe constante $F = 2{,}5N$ paralelă cu planul un timp $t = 2s$. Corpul pornește din repaus. Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de forța F
b) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare
c) puterea mecanică instantanee a forței F la momentul $t = 2s$

$m = 500g = 0{,}5\,kg$
$\mu = 0{,}1$
$F = 2{,}5N$
$t = 2s$
$v_0 = 0\,m/s$

---

a) $L_F = ?$
b) $L_{F_f} = ?$
c) $P = ?,\ t = 2s$



a) $L_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = F\cdot d\cdot \cancel{\cos 0}^{1} = F\cdot d$

Principiul II: $F - F_f = m\cdot a$

$F - \mu m g = m\cdot a \Rightarrow a = \dfrac{F - \mu m g}{m} = \dfrac{2{,}5 - \cancel{0{,}1}\cdot 0{,}5\cdot \cancel{10}}{0{,}5} = 4\,m/s^2$

legea MRUV $\Rightarrow d = \dfrac{a\cdot t^2}{2} = \dfrac{F - \mu m g}{2m}\cdot t^2 = \dfrac{2{,}5 - \frac{1}{\cancel{10}}\cdot 0{,}5\cdot \cancel{0{,}1}}{2\cdot 0{,}5}\cdot 2^2 = 8m$

$\Rightarrow L_F = F\cdot d = 2{,}5\cdot 8 = 20J$

b) $L_{F_f} = \vec{F_f}\cdot\vec{d} = F_f\cdot d\cdot \cancel{\cos 180}^{-1} = -\mu m g d = -\cancel{0{,}1}\cdot 0{,}5\cdot \cancel{10}\cdot 8 = -4J$

c) $P = F\cdot v$

$v(t) = v_0 + a\cdot t$
$v(2) = 0 + 4\cdot 2 = 8\frac{m}{s}$

$\Rightarrow P = F\cdot v(t) = 2{,}5\cdot 8 = 20\,W$

3) Două corpuri cu masele m_1 și $m_2=2m_1$ sunt lăsate să cadă liber. Primul corp se află în cădere după un timp t_1, iar al doilea corp $t_2=2t_1$. Să se afle:

a) raportul lucrurilor mecanice $\frac{L_1}{L_2}$, efectuate de greutățile celor două corpuri în timpul căderii lor

b) raportul puterilor mecanice medii ale celor două greutăți P_{m_1}/P_{m_2}

c) lucrul mecanic total al greutății corpului care acționează asupra corpului m_1, dacă în urma contactului cu suprafața acesta se întoarce în punctul de unde a plecat

m_1, t_1

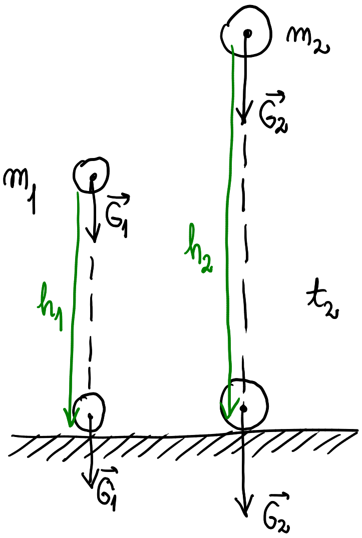
$m_2=2m_1,\ t_2=2t_1$

---

a) $\frac{L_1}{L_2}=?$

b) $\frac{P_{m_1}}{P_{m_2}}=?$

c) $L_{total}=?$



a) $L_{G_1}=\vec{G_1}\cdot\vec{h_1}=G_1\cdot h_1\cdot\cancel{\cos 0}^{\,1}=m_1 g h_1$

$L_{G_2}=\vec{G_2}\cdot\vec{h_2}=G_2\cdot h_2\cdot\cancel{\cos 0}^{\,1}=m_2 g h_2$

MRUV : $h_1=\frac{g t_1^2}{2}$

$h_2=\frac{g t_2^2}{2}$

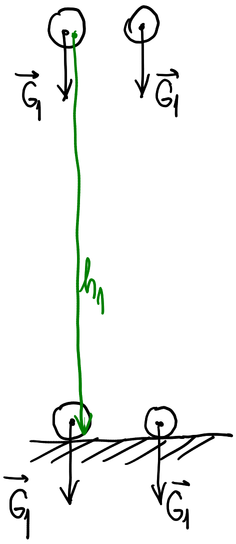
$$\Rightarrow \frac{L_{G_1}}{L_{G_2}}=\frac{m_1 \cancel{g}\frac{t_1^2}{\cancel{2}}}{m_2\cancel{g}\frac{t_2^2}{\cancel{2}}}=\frac{\cancel{m_1}\cdot t_1^2}{(2\cancel{m_1})\cdot(2t_1)^2}=\frac{1}{8}$$

b) $P_{m_1}=\frac{L_{G_1}}{t_1}$

$P_{m_2}=\frac{L_{G_2}}{t_2}$

$$\Rightarrow \frac{P_{m_1}}{P_{m_2}}=\frac{L_{G_1}}{L_{G_2}}\cdot\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}$$

c)



$L_{total}=L_{coborâre}+L_{urcare}$

$=\vec{G_1}\cdot\vec{h_1}+\vec{G_1}\cdot\vec{h_1}$

$=G_1\cdot h_1\cdot\cancel{\cos 0}^{\,1}+G_1\cdot h_1\cdot\cancel{\cos 180}^{\,-1}$

$=m_1 g h_1-m_1 g h_1$

$=0\,J$

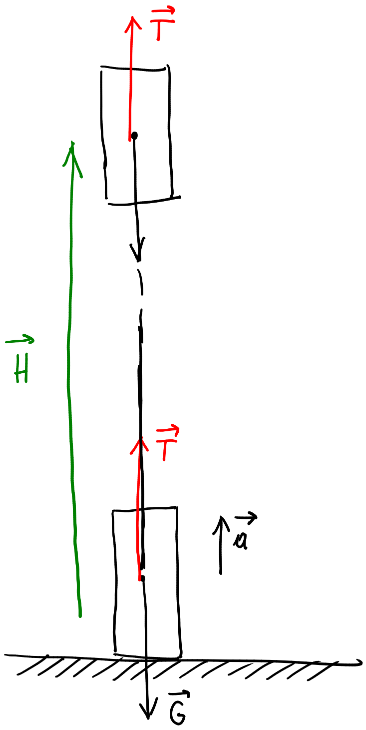
(4) Un lift cu masa maximă $m=320\,kg$ prins cu un cablu se mișcă vertical în sus cu accelerația $a=1\,m/s^2$ de la parter până la etajul 5. Înălțimea medie a unui etaj este $h=2{,}5\,m$. Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de tensiunea din cablul care prinde cabina liftului;
b) lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a liftului;
c) puterea medie a tensiunii.

$m=320\,kg$
$a=1\,m/s^2$
$h=2{,}5\,m$
$H=5h$

---

a) $L_T=?$
b) $L_G=?$
c) $P_{m_T}=?$



Principiul II $\quad T-G=m\cdot a$

a) $L_T=\vec{T}\cdot\vec{H}=T\cdot H\cdot \underbrace{\cos 0}_{1}=T\cdot H$

$T=ma+mg=320\cdot 1+320\cdot 10=3520\,N$

$\Rightarrow L_T=3520\cdot 5\cdot 2{,}5=44000\,J$

b) $L_G=\vec{G}\cdot\vec{H}=G\cdot H\cdot \underbrace{\cos 180}_{-1}=-mgH$

$\Rightarrow L_G=-320\cdot 10\cdot 5\cdot 2{,}5=40000\,J$

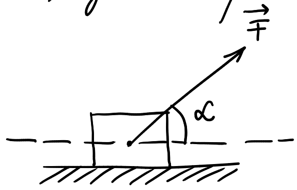
c) $P_{m_T}=\dfrac{L_T}{\Delta t}$

MRUV : $H=\dfrac{a\cdot\Delta t^2}{2}\Rightarrow \Delta t=\sqrt{\dfrac{2H}{a}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot 5\cdot 2{,}5}{1}}=5\,s$

$\Rightarrow P_{m_T}=\dfrac{44000\,J}{5\,s}=8800\,W$

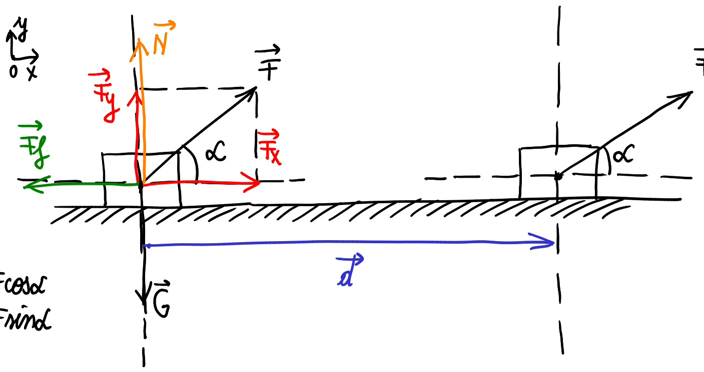
5) Un corp cu masa $m=1kg$ se deplasează cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu=0{,}1$ sub acțiunea unei forțe constante $\vec{F}$ care formează cu orizontala un unghi $\alpha=30^\circ$ ca în figura alăturată, astfel încât corpul va avea accelerația $a=1m/s^2$. Să se afle:

a) lucrul mecanic al forței F pe distanța $d_1=5m$
b) lucrul mecanic al normalei pe distanța $d_2=2m$
c) lucrul mecanic al forței de frecare pe distanța $d_3=3m$



$m=1kg$
$\mu=0{,}1$
$\alpha=30^\circ$
$a=1m/s^2$

a) $L_F=?$, $d_1=5m$
b) $L_N=?$, $d_2=2m$
c) $L_{Ff}=?$, $d_3=3m$



$$\begin{cases} F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\sin\alpha \end{cases}$$

a) $L_F = \vec{F}\cdot\vec{d_1} = (F\cos\alpha)\,d_1$

Principiul II: $\begin{cases} Ox:\ F_x - F_f = m\cdot a \\ Oy:\ N + F_y = G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\cos\alpha - \mu N = m\cdot a \\ N + F\sin\alpha = mg \end{cases}$

$$\Rightarrow F\cos\alpha - \mu\cdot(mg - F\sin\alpha) = ma$$

$$F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = ma$$

$$F = \frac{ma+\mu . mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} = \frac{1\cdot1+0{,}1\cdot1\cdot10}{\frac{\sqrt{3}}{2}+0{,}1\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{1{,}83} = 2{,}18N$$

$$\Rightarrow L_F = 2{,}18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot5 = 9{,}45J$$

b) $L_N = \vec{N}\cdot\vec{d_2} = N\cdot d_2\cdot\cancel{\cos 90^\circ}^{\,0} = 0$

c) $L_{Ff} = \vec{F_f}\cdot\vec{d_3} = F_f\cdot d_3\cdot\cancel{\cos 180}^{\,-1} = -\mu\cdot(mg - F\sin\alpha)\cdot d_3$

$= -0{,}1\cdot\left(1\cdot10 - 2{,}18\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot3$

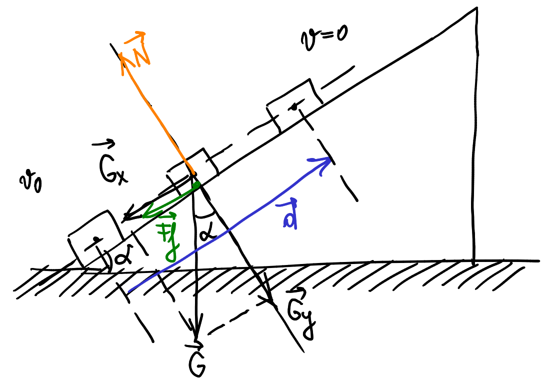
$= -2{,}67J$

6) Un corp cu masa $m=500g$ este aruncat pe un plan înclinat sub un unghi $\alpha=30°$ cu o viteză inițială de jos în sus. Mișcarea corpului se face cu frecare coeficientul de frecare fiind descrescător în mod uniform de la valoarea $\mu_1=0{,}3$ până la valoarea $\mu_2=0{,}1$, când corpul se oprește la o distanță $d=10m$ de punctul de lansare. Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare
b) lucrul mecanic efectuat de forța de greutate
c) lucrul mecanic efectuat de forța de apăsare

$m = 500\,g = 0{,}5\,kg$
$\alpha = 30°$
v_0
$\mu \in (0{,}3;0{,}1)$
$d = 10m$

a) $L_{Ff} = ?$
b) $L_G = ?$
c) $L_N = ?$



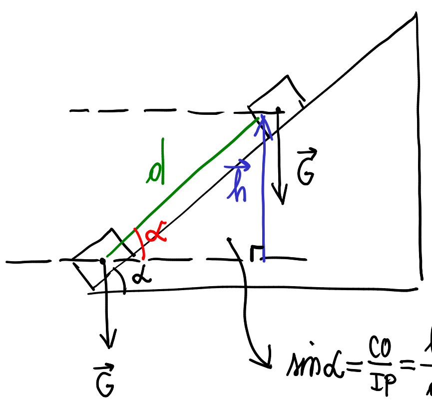
$$\begin{cases} G_x = G\sin\alpha \\ G_y = G\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

a) $$L_{Ff} = \vec{F_f}\cdot\vec{d} = \overline{F_f}\cdot d\cdot \cancel{\cos 180}^{-1}$$

$$\begin{matrix} F_{f1} = \mu_1 mg\cos\alpha \\ F_{f2} = \mu_2 mg\cos\alpha \end{matrix} \Rightarrow \overline{F_f} = \frac{F_{f1}+F_{f2}}{2} = \frac{\mu_1 mg\cos\alpha + \mu_2 mg\cos\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow L_{Ff} = -\frac{(\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha\cdot d}{2} = -\frac{(0{,}3+0{,}1)\cdot 0{,}5\cdot 10\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10}{2} = \frac{-\cancel{4}\cdot 5\cdot\sqrt{3}}{\cancel{4}} = -8{,}66\,J$$

b) $$L_G = \vec{G}\cdot\vec{h} = G\cdot h\cdot\cancel{\cos 180}^{-1} = -mgh = -mg\,d\sin\alpha$$
$$= -0{,}5\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{1}{2} = -25\,J$$



$$\sin\alpha = \frac{CO}{IP} = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d\sin\alpha$$

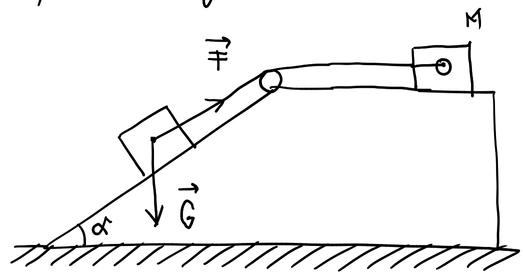
c) $$L_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = N\cdot d\cdot\cancel{\cos 90}^{0} = 0\,J$$

(7) Un bloc de piatră de greutate $G=3000N$ este tras uniform, cu viteza constantă $v=5m/s$, pe panta OA de unghi $\alpha=30^\circ$, cu ajutorul unui cablu acționat de motorul M, ca în figura alăturată. Cablul exercită asupra blocului forța $F=4000N$, a cărei direcție de acțiune este paralelă cu planul înclinat format de pantă. Să se afle:

a) puterea furnizată de motor

b) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în timpul deplasării blocului de piatră cu $d=8m$ de-a lungul pantei

c) lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra blocului pe distanța OA



$G=3000N$

$v=5m/s=const.$

$\alpha=30^\circ$

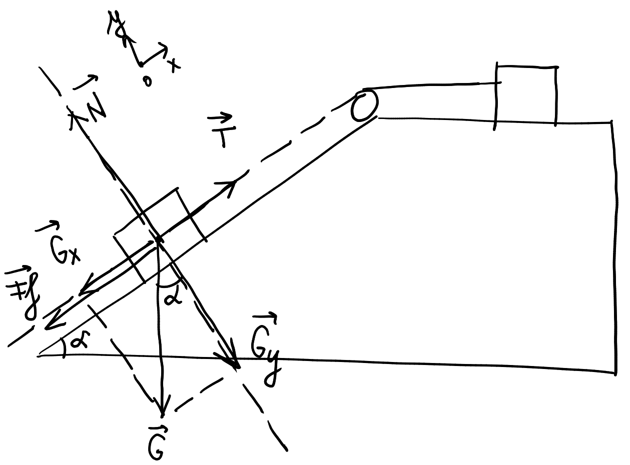
$F=4000N$

---

a) $P=?$

b) $L_{Ff}=?$, $d=8m$

c) $L_R=?$



$$\begin{cases} G_x = G\sin\alpha \\ G_y = G\cos\alpha \end{cases}$$

Principiul II $\begin{cases} T - G_x - Ff = 0 \\ N = G_y \end{cases} \Rightarrow T - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0$

a) $P = F\cdot v = 4000\cdot 5 = 20000\ W$

b) $L_{Ff} = \vec{Ff}\cdot\vec{d} = Ff\cdot d\cdot \overset{-1}{\cancel{\cos 180}} = -\mu mg\cos\alpha\cdot d$

$$L_{Ff} = (mg\sin\alpha - T)\cdot d$$
$$= (mg\sin\alpha - F)\cdot d$$
$$= \left(3000\cdot\frac{1}{2} - 4000\right)\cdot 8 = -20000\ J$$

c) $R = T - G_x - Ff = 0$

$\Rightarrow L_R = \vec{R}\cdot\vec{OA} = \overset{0}{\cancel{R}}\cdot OA = 0\ J$

(8) Un corp cu masa $m=1kg$ se găsește la baza unui plan înclinat care formează unghiul $\alpha=30^\circ$ cu orizontala. Înălțimea planului înclinat este $h=50cm$ iar coeficientul de frecare la alunecare este $\mu=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Să se afle:

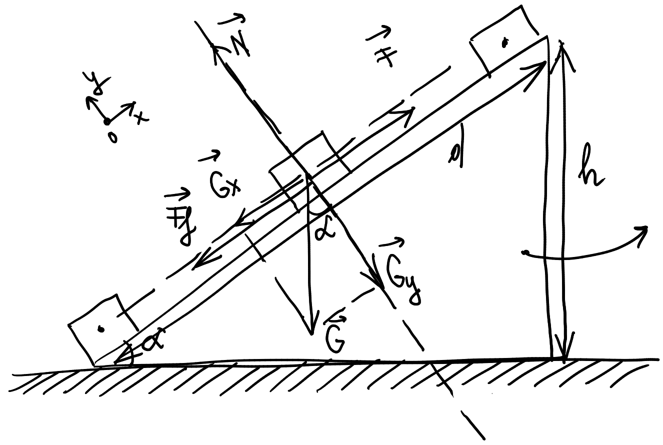
a) puterea necesară ridicării corpului de-a lungul planului, cu viteza constantă $v=\frac{30m}{min}$

b) lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la ridicarea corpului până în vârful planului înclinat

c) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la urcarea corpului până în vârful planului înclinat

$m=1kg$
$\alpha=30^\circ$
$h=50cm=0,5m$
$\mu=\frac{\sqrt{3}}{6}$

a) $P=?$, $v=\frac{30m}{min}$
b) $L_G=?$
c) $L_{Ff}=?$



$\sin\alpha=\frac{h}{d}$

$\Rightarrow d=\frac{h}{\sin\alpha}$

Principiul II: $F-G_x-F_f=0 \quad |\cdot d$

$L_F-L_{G_x}-L_{F_f}=0$

$\Rightarrow F-mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=0$

$F=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=1\cdot10\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=10\cdot\frac{3}{4}=7,5N$

a) $P=F\cdot v=7,5\cdot\frac{30m}{60s}=3,75W$

b) $L_G=\vec{G}\cdot\vec{h}=G\cdot h\cdot\cancel{\cos180}^{-1}=-mgh=-1\cdot10\cdot0,5=-5J$

c) $L_{Ff}=\vec{F_f}\cdot\vec{d}=F_f\cdot d\cdot\cancel{\cos180}^{-1}=-\mu mg\cos\alpha\cdot d$

$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot1\cdot10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{0,5}{0,5}=-2,5J$

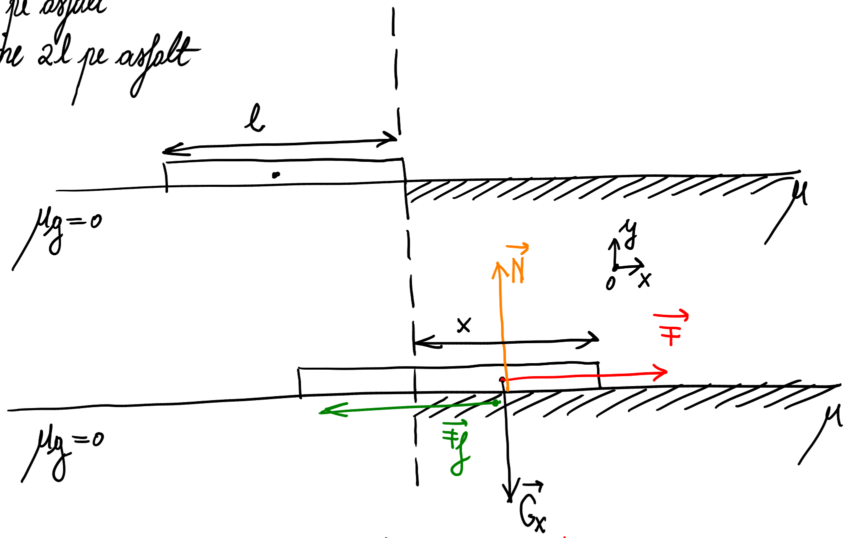
9) O scândură omogenă de masă $m=500g$ și lungime $l=18cm$, este deplasată orizontal, pe gheață $(\mu_g=0)$, de către un elev. La un moment dat scândura pătrunde pe asfalt, unde coeficientul de frecare este $\mu=0,6$. Din acest moment, elevul deplasează uniform scândura cu ajutorul unei forțe orizontale. Să se afle lucrul mecanic efectuat de elev din momentul în care scândura atinge asfaltul și până când pătrunde:

a) pe o treime din asfalt
b) în întregime pe asfalt
c) pe o lungime $2l$ pe asfalt

$m=500g=0,5kg$
$l=18cm=0,18m$
$\mu_g=0$
$\mu=0,6$
MRU

---

a) $L=?$, $x=\frac{1}{3}l$
b) $L=?$, $x=l$
c) $L=?$, $2l$



Regula de trei simplă (regula direct proporționalității)

l .... m
x .... m_x

$\Rightarrow m_x = m\cdot\frac{x}{l}$ (m_x = masa intrată pe asfalt)

! **Obs** Pe măsură ce scândura intră mai mult pe asfalt, mai multă masă din scândură apasă pe asfalt și astfel forța de frecare crește.

$\Rightarrow$ Pentru a păstra mișcarea uniformă atunci și forța motoare $\vec{F}$ a elevului crește pentru a compensa creșterea forței de frecare $\vec{F_f}$ $\left(F_f=\frac{\mu m g}{l}\cdot x\right)$.

Principiul II: $\begin{cases} Ox: F-F_f=0 \\ Oy: N=G_x \end{cases}$

$$\Rightarrow F=\mu N=\mu m_x g=\mu\cdot m\frac{x}{l}\cdot g$$

! **Obs** În cazul în care forța nu rămâne constantă, pentru a calcula lucrul mecanic se consideră forța medie pe întregul proces al lucrului. $(\overline{F})$ $\boxed{L_F=\overline{F}\cdot d}$

a) $L_F=\vec{\overline{F}}\cdot\vec{d}=\overline{F}\cdot d\cdot \cancel{\cos 0}^{1}$, $d=\frac{1}{3}\cdot l$

$$L_F=\left(\frac{F_{initial}+F_{final}}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}l$$
$$=\frac{\left(\mu m\frac{\cancel{l}}{l}g+\mu m\cdot\frac{1/3\cdot l}{l}g\right)}{2}\cdot\frac{1}{3}l$$
$$=\frac{\mu m g}{6}\cdot\frac{l}{3}=\frac{\mu m g l}{18}=\frac{0,6\cdot0,5\cdot10\cdot0,18}{18}$$
$$=0,03J=30mJ$$

b) $L_F=\vec{\overline{F}}\cdot\vec{d}=\overline{F}\cdot d\cdot\cancel{\cos 0}$, $d=l$

$$L_F=\left(\frac{F_{initial}+F_{final}}{2}\right)\cdot l$$
$$=\frac{\left(\mu m\frac{\cancel{l}}{l}g+\mu m\cdot\frac{l}{l}g\right)}{2}\cdot l$$
$$=\frac{\mu m g l}{2}=\frac{0,6\cdot0,5\cdot10\cdot0,18}{2}=0,27J$$

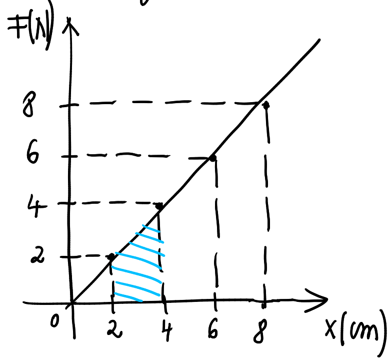
c) $L_F=0,27J+\mu m g l$
$$=0,27+0,6\cdot0,5\cdot10\cdot0,18=0,81J$$

(10) Un corp cu masa $m=2kg$ se află inițial în repaus pe o suprafață orizontală. Asupra corpului se aplică, prin intermediul unui resort orizontal, o forță de tracțiune F, a cărei valoare crește lent și determină alungirea resortului conform graficului alăturat. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea $\mu=0,2$. Să se afle:

a) constanta elastică a resortului

b) valoarea alungirii resortului în timpul deplasării uniforme a corpului

c) lucrul mecanic efectuat de forța F care trage de resort, în timpul deformării resortului de la $x_1=2cm$ la $x_2=4cm$.



$m=2kg$

$\mu=0,2$

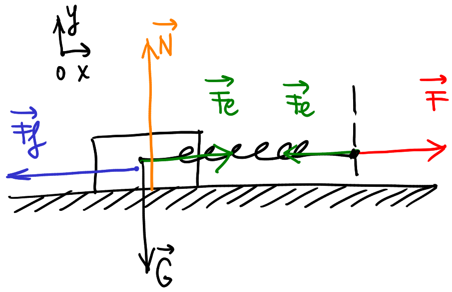
F variabilă

---

a) $k=?$

b) $\Delta l=?$, MRU

c) $L_F=?$, $x\in(x_1,x_2)$



Principiul II $\begin{cases} Ox: & F_e - F_f = 0 \\ Oy: & N = G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - F_f = 0 \\ N = mg \end{cases}$

a) $F = F_e = k\cdot x$

$2N = k\cdot 2cm \Rightarrow k = \frac{2N}{0,02m} = 100\frac{N}{m}$

b) MRU $\Rightarrow F = F_f = \mu mg = k\cdot\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0,2\cdot 2\cdot 10}{100} = 0,04m = 4cm$

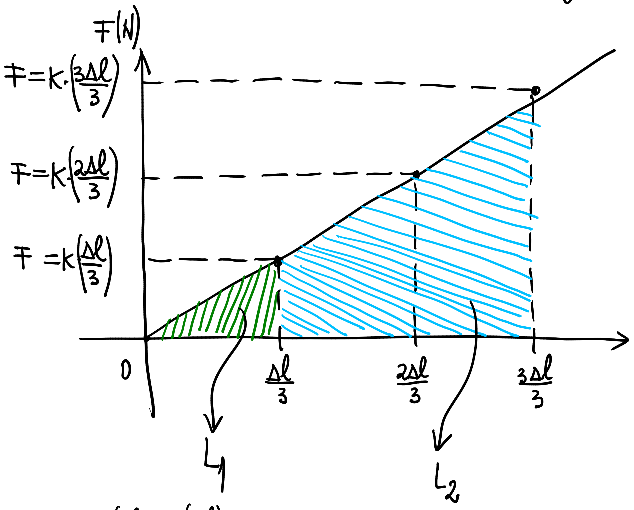
c) $L_F = A_{trapez} = \frac{(b+B)}{2}\cdot h = \frac{(2+4)}{2}\cdot 0,02 = 0,06J = 60mJ$

(11) Să se afle de câte ori este mai mic lucrul mecanic efectuat la alungirea unui resort pe prima treime din alungire față de lucrul mecanic efectuat pentru alungirea cu restul de două treimi din alungire.

L_1, $x \in \left(0, \frac{\Delta l}{3}\right)$

L_2, $x \in \left(\frac{\Delta l}{3}, \Delta l\right)$

$\frac{L_1}{L_2} = ?$



$$L_1 = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{\left(\frac{\Delta l}{3}\right) \cdot k \cdot \left(\frac{\Delta l}{3}\right)}{2}$$

$$L_2 = \frac{(b+B)}{2} \cdot h = \frac{\left[k\left(\frac{\Delta l}{3}\right) + k \cdot \left(\frac{3\Delta l}{3}\right)\right]}{2} \cdot \left(\frac{3\Delta l}{3} - \frac{\Delta l}{3}\right)$$

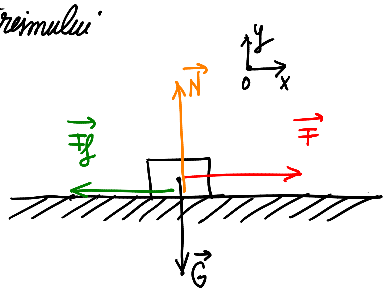
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{\cancel{k} \cdot \cancel{\frac{\Delta l^2}{9}}}{2}}{\frac{4\cancel{k} \cdot \cancel{\Delta l}}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2\cancel{\Delta l}}{3}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{8}$$

(12) Un autoturism cu masa $m = 1t$ se deplasează pe un drum rectiliniu și orizontal. Puterea dezvoltată de forța de tracțiune este constantă, având valoarea $P = 60kW$. Când viteza autoturismului este $v_1 = 36\frac{km}{h}$, rezultanta forțelor care se opun mișcării are valoarea $R_1 = 1kN$. Când viteza autoturismului are valoarea $v_2 = 54\frac{km}{h}$ accelerația autoturismului este $a_2 = 2\,m/s^2$, iar când viteza autoturismului atinge valoarea maximă v_3, rezultanta forțelor care se opun mișcării devine $R_3 = 3kN$. Să se afle:

a) accelerația a_1 a autoturismului când viteza are valoarea v_1

b) rezultanta $\vec{R_2}$ a forțelor care se opun mișcării când viteza autoturismului este v_2

c) valoarea v_3 a vitezei maxime a autoturismului



$m = 1t = 1000kg$

$P = const. = 60\,000W$

$v_1 = \frac{36km}{h} = 36 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 10\frac{m}{s}$, $R_1 = 1000N$

$v_2 = \frac{54km}{h} = 54 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 15\frac{m}{s}$, $a_2 = \frac{2m}{s^2}$

v_3 , $R_3 = 3000N$

---

a) $a_1 = ?$, v_1

b) $R_2 = ?$, v_2

c) $v_3 = ?$

Principiul II $\quad F - F_f = ma$

$F - \mu mg = ma$

a) $P = const. = F_1 v_1$

Principiul II: $F_1 - \mu mg = m \cdot a_1$

$$\Rightarrow \frac{P}{v_1} - R_1 = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{P}{v_1} - R_1}{m} = \frac{\frac{60000}{10} - 1000}{1000} = 5\,m/s^2$$

b) $P = const = F_2 \cdot v_2$

Principiul II: $F_2 - R_2 = m \cdot a_2$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{P}{v_2} - ma_2 = \frac{60000}{15} - 1000 \cdot 2 = 2000N$$

c) $P = const = F_3 \cdot v_3$

Principiul II: $F_3 - R_3 = 0$ (MRU cu $v_{max} = const = v_3$)

$$\frac{P}{v_3} - R_3 = 0$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{P}{R_3} = \frac{60000}{3000} = 20\frac{m}{s}$$

(13) Un camion având greutatea G se deplasează pe o șosea cu viteza menținută constantă mereu v_0. Rezistența la înaintare R depinde numai de viteza camionului! Când camionul urcă pe un drum de pantă $p = \sin\alpha$ (unde α este unghiul făcut de drum cu planul orizontal), puterea camionului este $P_1 = 124\,kW$. Când camionul coboară pe același drum, puterea camionului este $P_2 = 112\,kW$. Să se afle:

a) relația dintre rezistența la înaintare R, puterea P_0 și viteza v_0 în cazul în care drumul este orizontal

b) relația dintre rezistența la înaintare R, puterea P_1, greutatea G, panta p și viteza v_0 în cazul care camionul urcă drumul de pantă p

c) relația dintre rezistența la înaintare R, puterea P_2, greutatea G, panta p și viteza v_0 în cazul în care camionul coboară drumul de pantă p

d) puterea camionului pe drum orizontal

G

v_0

$R(v)$

$p = \sin\alpha$

urcare $\Rightarrow P_1 = 124\,kW$

coborâre $\Rightarrow P_2 = 112\,kW$

---

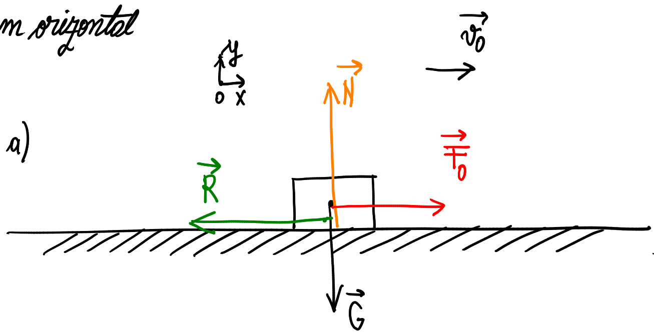
a) $R(P_0, v_0) = ?$, drum orizontal

b) $R(P_1, G, p, v_0) = ?$, urcare

c) $R(P_2, G, p, v_0) = ?$, coborâre

d) $P = ?$, drum orizontal

a)



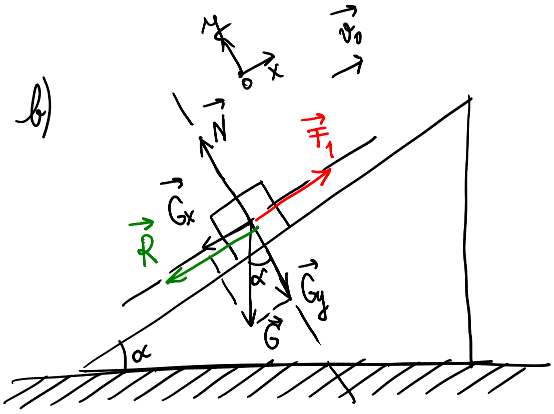
a) Principiul II $\quad F_0 - R = 0$ (mișcare uniformă)

$$F_0 = R = \cancel{\mu G}$$

$$P_0 = F_0 \cdot v_0 \Rightarrow F_0 = \frac{P_0}{v_0}$$

$$\Rightarrow R = \frac{P_0}{v_0}$$

b)



$$\begin{cases} G_x = G\sin\alpha = G\cdot p \\ G_y = G\cdot\cos\alpha = G\sqrt{1-\sin^2\alpha} = G\sqrt{1-p^2} \end{cases}$$

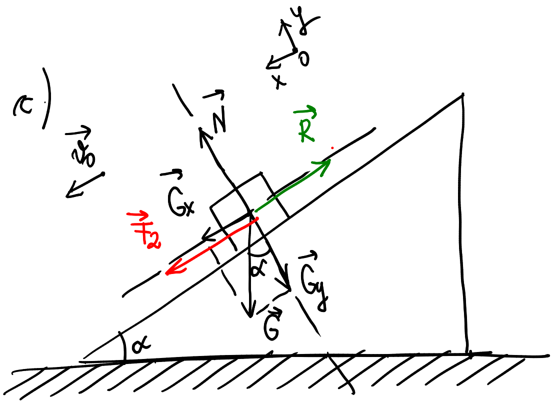
Principiul II $\quad F_1 - R - G_x = 0$

$$R = F_1 - G_x$$

$$P_1 = F_1 \cdot v_0 \Rightarrow F_1 = \frac{P_1}{v_0}$$

$$\Rightarrow R = \frac{P_1}{v_0} - G\cdot p$$

c)



Principiul II $\quad F_2 + G_x - R = 0$

$$R = F_2 + G_x$$

$$P_2 = F_2 \cdot v_0 \Rightarrow F_2 = \frac{P_2}{v_0}$$

$$\Rightarrow R = \frac{P_2}{v_0} + Gp$$

(+)

d)

$$2R = \frac{P_1}{v_0} + \frac{P_2}{v_0}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(P_1 + P_2)}{2v_0}$$

dar $P_0 = R\cdot v_0$

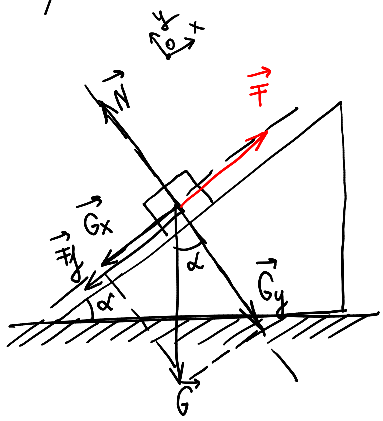
$$\Rightarrow P_0 = \frac{P_1 + P_2}{2} = 118\,kW$$

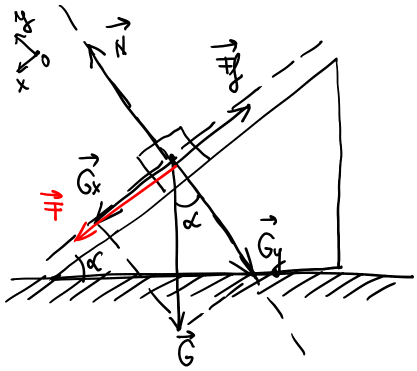
(14) La aceeași putere P dezvoltată de un motor, o mașină urcă și coboară o pantă cu unghi foarte mic, cu vitezele constante $v_1 = 10\,m/s$ și respectiv $v_2 = 15\,m/s$ și se deplasează pe orizontală cu viteza v_3. Considerând că pe tot parcursul mișcării coeficientul de frecare este același, să se afle:

a) relația dintre puterea mașinii P, masa ei m, viteza v_1, unghiul pantei α și coeficientul de frecare μ la urcarea pantei
b) relația dintre puterea mașinii P, masa ei m, viteza v_2, unghiul pantei α și coeficientul de frecare μ la coborârea pantei
c) viteza cu care se mișcă mașina pe orizontală

$P = const.$
$v_1 = \frac{10\,m}{s}$ (urcare)
$v_2 = \frac{15\,m}{s}$ (coborâre)
v_3 (orizontală)
$\mu = const.$

a) $P(m, v_1, \alpha, \mu) = ?$, urcare
b) $P(m, v_2, \alpha, \mu) = ?$, coborâre
c) $v_3 = ?$





Principiul II: $\begin{cases} F_u - G_x - F_f = 0 \\ G_y = N \end{cases}$

$\Rightarrow F_u = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

$P = F_u \cdot v_1$

a) $P = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)v_1$

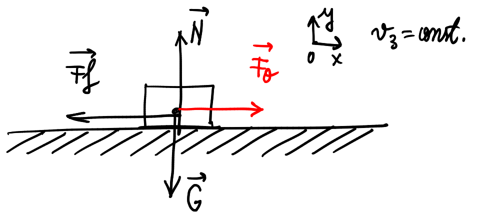
Principiul II: $\begin{cases} F_c + G_x - F_f = 0 \\ G_y = N \end{cases}$

$\Rightarrow F_c = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$

$P = F_c \cdot v_2$

b) $P = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \cdot v_2$

c)



Principiul II: $F_o - F = 0$

$F_o - \mu mg = 0$

$P = F_o \cdot v_3 = \mu mg v_3$

$\Rightarrow v_3 = \frac{P}{\mu mg}$

a) $\Rightarrow \frac{P}{v_1} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

b) $\Rightarrow \frac{P}{v_2} = -mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

(+) $\frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2} = 2\mu mg\cos\alpha \Rightarrow \mu mg = \frac{\frac{P}{v_1} + \frac{P}{v_2}}{2\cos\alpha}$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{\cancel{P}}{\cancel{P}\left(\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2\cos\alpha}\right)} = \frac{2\cos\alpha}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 2}{10 + 15} = 12\,\frac{m}{s}$$

$\alpha << 5^\circ \Rightarrow \cos\alpha \simeq 1$

(15) Un camion tractează pe un drum orizontal o remorcă de masă $m = 1000\,kg$ cu viteza constantă $v = 36\,\frac{km}{h}$. Forța de tensiune care apare în sistemul de cuplaj are valoarea $T = 600\,N$. La un moment dat, menținându-și aceeași viteză, camionul începe să urce o pantă înclinată față de orizontală cu unghiul α pentru care $\sin\alpha = 0{,}1$. Să se afle:

a) puterea necesară pentru a tracta remorca pe drumul orizontal

b) lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență care acționează asupra remorcii în timpul deplasării pe o distanță $d = 10\,m$ pe porțiunea orizontală

c) puterea necesară pentru a tracta remorca pe pantă considerând că forța de rezistență la înaintare are aceeași valoare ca și la deplasarea pe drumul orizontal.

$m = 1000\,kg$

$v = 36\,\frac{km}{h} = 36 \cdot \frac{1000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s}$

$T = 600\,N$

$\sin\alpha = 0{,}1$

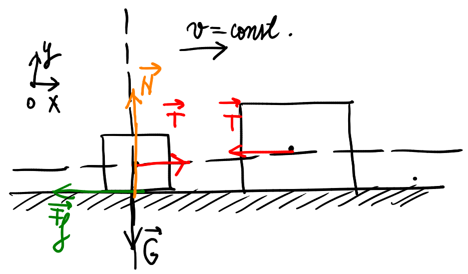
---

a) $P = ?$, orizontal

b) $L_{F_f} = ?$, $d = 10\,m$, orizontal

c) $P' = ?$, oblic

a)



Principiul II: $T - F_f = 0$

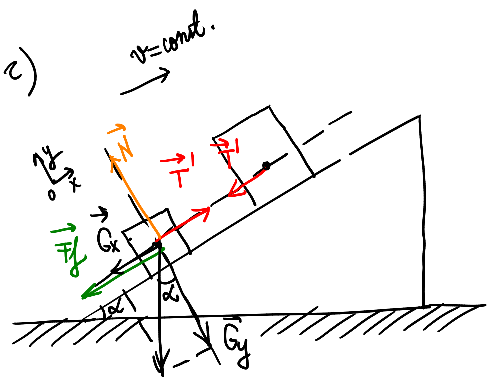
$T = \mu m g$

$P = T \cdot v = 600 \cdot 10 = 6000\,W$

b) $L_{F_f} = \vec{F_f} \cdot \vec{d} = F_f\, d \cdot \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -\mu m g\, d$

$= -600 \cdot 10 = -6000\,J$

c)



$P' = T' \cdot v$

Principiul II: $T' - G_x - F_f = 0$

$T' = G_x + F_f$

$= m g \sin\alpha + F_f$

$= 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}1 + 600$

$= 1600\,N$

$\Rightarrow P' = 1600 \cdot 10 = 16000\,W$

(16) Un cal trage o sanie cu masa $m = 10\,kg$ uniform cu viteza $v = 4\,m/s$ pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$, cu o forță de tracțiune F paralelă cu planul înclinat, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu = 0{,}2$. Să se afle:

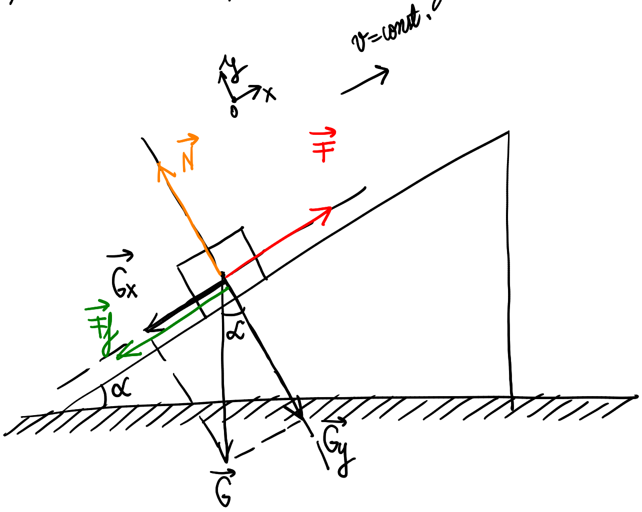
a) puterea activă dezvoltată de cal

b) bilanțul puterilor

c) cât reprezintă puterea consumată pentru învingerea frecărilor la ridicarea saniei din puterea activă?

$m = 10\,kg$
$v = 4\,m/s$
$\alpha = 45°$
$\mu = 0{,}2$

a) $P_F = ?$
b) $P_c,\ P_u,\ P_{Ff} = ?$
c) $\dfrac{P_{Ff}}{P_c} = ?$



Principiul II: $F - G_x - Ff = 0 \quad |\cdot v$

$$\boxed{F\cdot v - G_x\cdot v - Ff\cdot v = 0}$$

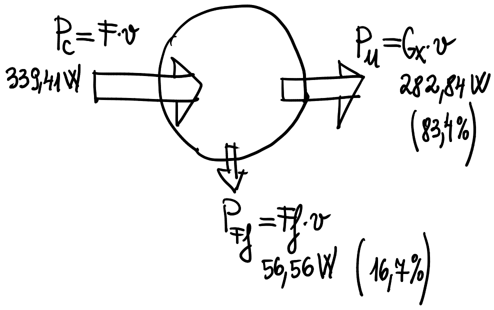
$$\boxed{P_c - P_u - P_{Ff} = 0}$$

a)
b)
P_c = puterea consumată (sau puterea activă) $= F\cdot v = (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)\cdot v = \left(10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}2\cdot 10\cdot 10\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 4 = 339{,}41\,W$

P_u = puterea utilă $= G_x\cdot v = mg\sin\alpha\cdot v = 10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4 = 282{,}84\,W$

P_{Ff} = puterea disipată prin frecări $= Ff\cdot v = \mu mg\cos\alpha\cdot v = 0{,}2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4 = 56{,}56\,W$

c)



$$\frac{P_{Ff}}{P_c} = \frac{56{,}56\,W}{339{,}41\,W} = 0{,}167 = 16{,}7\%$$

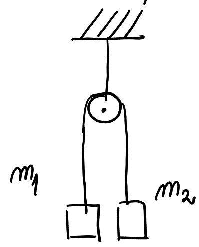
$$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{282{,}84\,W}{339{,}41\,W} = 0{,}834 = 83{,}4\%$$

(17) Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu mase $m_1 = 2kg$ și $m_2 = 4kg$, ținute inițial în repaus la aceeași înălțime față de sol $H = 0,6m$ ca în figură. Se lasă liber sistemul. Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de tensiunea din firul care susține corpul cu masa m_1, când sistemul se deplasează pe distanța $h = 0,3m$

b) lucrul mecanic total al greutăților corpurilor când corpul mai greu ajunge la sol, dacă se consideră firul suficient de lung astfel încât corpul 1 să nu ajungă la scripete

c) puterea mecanică totală medie a sistemului de corpuri calculată între momentul plecării și cel ajungerii pe sol a lui m_2



$m_1 = 2kg$

$m_2 = 4kg$

$v_0 = 0\ m/s$

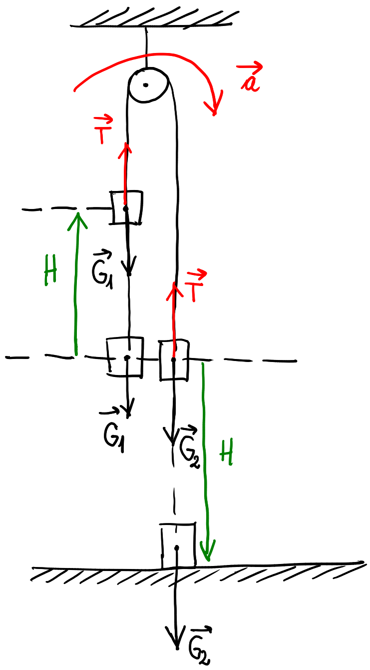
$H = 0,6m$

---

a) $L_T = ?$, $h = 0,3m$

b) $L_G = L_{G_1} + L_{G_2} = ?$, H

c) $P_m = ?$



Principiul II: $T - G_1 = m_1 a$ (pentru m_1)

$G_2 - T = m_2 a$ (pentru m_2)

(+) $m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2) a$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2} = \frac{20}{6} = 3,34 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow T = m_1 a + m_1 g = \frac{m_1 (m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2} + m_1 g$$

$$= 2 \cdot (3,34 + 10) = 26,67 N$$

a) $L_T = \vec{T} \cdot \vec{h} = T \cdot h \cdot \cancel{\cos 0}^{1}$

$= 26,67 \cdot 0,3 = 8J$

b) $L_G = L_{G_1} + L_{G_2}$

$= \vec{G_1} \cdot \vec{H} + \vec{G_2} \cdot \vec{H}$

$= G_1 \cdot H \cdot \cancel{\cos 180}^{-1} + G_2 \cdot H \cdot \cancel{\cos 0}^{1}$

$= -m_1 g H + m_2 g H$

$= g H (m_2 - m_1)$

$= 10 \cdot 0,6 \cdot (4 - 2) = 12J$

c) $P_m = \frac{L}{\Delta t}$

$L = L_{T_1} + L_{G_1} + L_{T_2} + L_{G_2}$

$L = \cancel{TH} - G_1 \cdot H - \cancel{TH} + G_2 \cdot H$

$L = 12J$

MRUV: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$

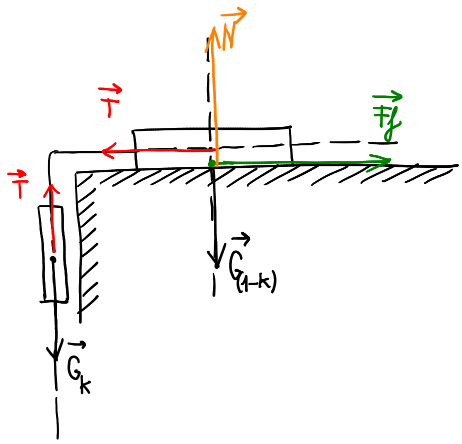
$$H = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,6}{3,34}} = 0,599s$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{12}{0,599} = 20,01 W$$

(18) Un lanț cu masa $m=0{,}8\,kg$ și lungimea $\ell=1{,}5\,m$ este așezat pe o masă orizontală astfel încât o parte a sa atârnă la marginea mesei. Lanțul începe să alunece singur atunci când lungimea părții care atârnă este $k=1/3$ din lungimea totală. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța de frecare care acționează asupra lanțului până în momentul în care acesta părăsește complet masa.

$m=0{,}8\,kg$
$\ell=1{,}5\,m$
$k=\frac{1}{3} \Rightarrow$ începutul mișcării lanțului

$L_{F_f}=?$



Chiar cu o clipă mai înainte ca lanțul să înceapă să se miște (adică încă în repaus, la limită) scriem Principiul II:

$$\begin{cases} G_k - T = 0 & \text{(pentru partea atârnată de lanț)} \\ T - \mu \cdot G_{(1-k)} = 0 & \text{(pentru partea de lanț de pe masă)} \end{cases}$$

din regula de trei simplă (regula direct proporționalei)

$\ell \ldots\ldots\ldots m$
$k\cdot\ell \ldots\ldots\ldots k\cdot m$
$(1-k)\cdot\ell \ldots\ldots (1-k)\cdot m$

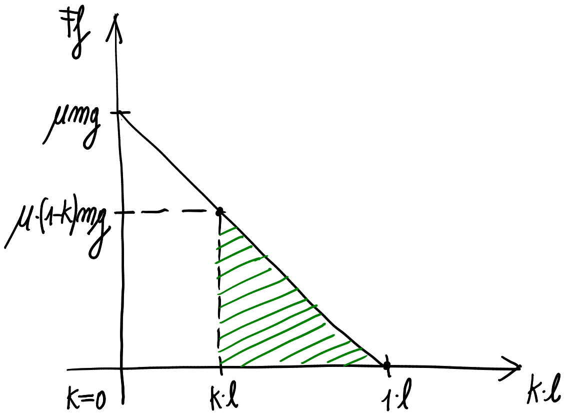
$$\Rightarrow \begin{cases} kmg - T = 0 \\ T - \mu\cdot(1-k)mg = 0 \end{cases}$$

$\oplus$ $\quad kmg - \mu(1-k)mg = 0$

$k - \mu(1-k) = 0$

$$\boxed{\mu = \frac{k}{1-k}}$$

Pe măsură ce lanțul părăsește masa, din cauza apăsării care scade $\Rightarrow$ scade și forța de frecare (F_f variabilă)



$F_f = \mu\cdot N = \mu\cdot(1-k)mg$

$F_f(k) = \mu mg - \mu mg\cdot k \quad , k\in[0,1]$

$\boxed{y(x) = b + a\cdot x}$

funcții de gradul I

$a = -\mu mg$ (panta)
$b = \mu mg$ (intersecția cu axa ordonatelor)

!Obs Aria hașurată reprezintă lucrul mecanic al forței de frecare variabile care scade, de la momentul începerii alunecării $\left(k=\frac{1}{3}\right)$ până la momentul părăsirii mesei $(k=1)$.

$$\Rightarrow L_{F_f} = \frac{C_1 C_2}{2} = \frac{\mu(1-k)mg\cdot(\ell - k\ell)}{2}$$

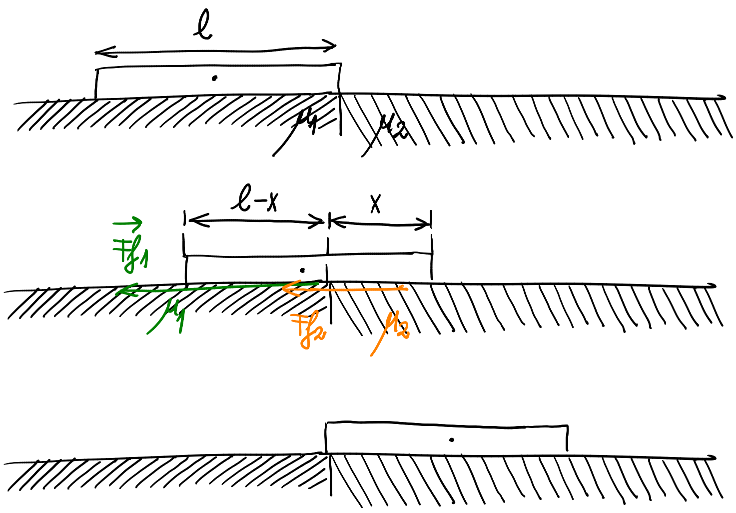
$$= \frac{\frac{k}{\cancel{1-k}}\cdot\cancel{(1-k)}\cdot mg\cdot\ell\cdot(1-k)}{2} = \frac{k(1-k)mg\ell}{2}$$

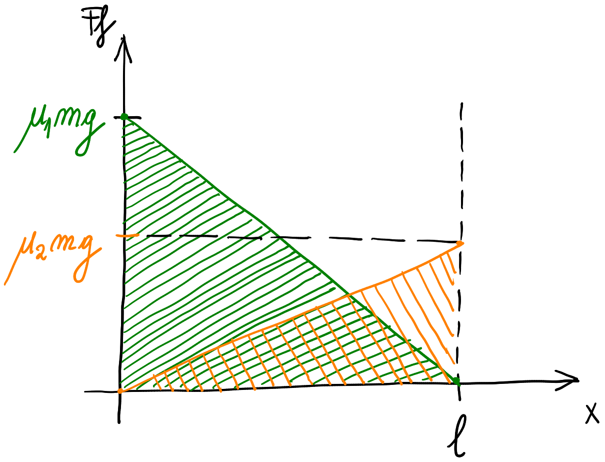
$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0{,}8\cdot 10\cdot 1{,}5}{2} = 1{,}34\,J$$

(19) Un lanț cu masa m se află cu unul din capete la limita de separație dintre două suprafețe orizontale confecționate din materiale diferite. Coeficienții de frecare dintre lanț și cele două suprafețe sunt μ_1 și μ_2. Cât este lucrul mecanic necesar pentru a trece complet lanțul de pe o suprafață pe cealaltă?

m
l
μ_1, μ_2

$L = ?$





x = porțiunea din lanț intrată pe a doua suprafață

Forța de frecare F_{f1} este inițial $\mu_1 mg$ și scade apoi până la 0, când lanțul iese de pe prima suprafață $\Rightarrow F_{f1}\downarrow$
Forța de frecare F_{f2} este inițial 0 și crește apoi până la $\mu_2 mg$, când lanțul a trecut pe a doua suprafață $\Rightarrow F_{f2}\uparrow$

$$L_{F_{f1}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{\mu_1 mg \cdot l}{2}$$

$$L_{F_{f2}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{\mu_2 mg\, l}{2}$$

$$L_F = L_{F_f} = L_{F_{f1}} + L_{F_{f2}} = \frac{(\mu_1+\mu_2) mg\, l}{2}$$

! Obs

x = porțiunea din lanț care intră pe a doua suprafață $\quad x \in [0, l]$
l-x = porțiunea din lanț rămasă pe prima suprafață

regula de trei simplă (regula direct proporționalului)

$l \;\ldots\ldots\; m$

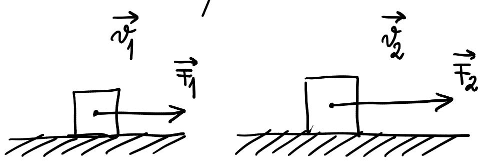
$x \;\ldots\ldots\; m \cdot \frac{x}{l}$ $\Rightarrow F_{f1} = \mu_1 m \frac{(l-x)}{l} g \Rightarrow F_{f1}(x) = \mu_1 mg - \mu_1 mg \frac{x}{l} \Rightarrow y_1(x) = a_1 x + b$, $a_1 < 0$ dreaptă descrescătoare

$l-x \;\ldots\ldots\; m \cdot \frac{(l-x)}{l}$ $\Rightarrow F_{f2} = \mu_2 m \frac{x}{l} \cdot g \Rightarrow F_{f2}(x) = \mu_2 mg \frac{x}{l} \Rightarrow y_2(x) = a_2 x$, $a_2 > 0$ dreaptă crescătoare

(20) Două autocamioane ale căror motoare au puterile P_1 și P_2 pot atinge vitezele v_1 respectiv v_2. Ce viteză vor atinge cele două autocamioane dacă sunt legate între ele printr-un cablu?

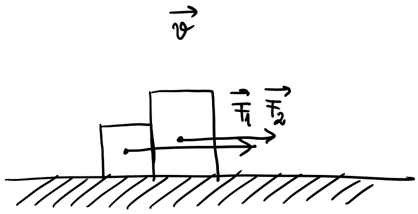
P_1, P_2
v_1, v_2

$v = ?$



$P_1 = F_1 \cdot v_1$ $\qquad$ $P_2 = F_2 \cdot v_2$

$\Rightarrow F_1 = \frac{P_1}{v_1}$ $\qquad$ $\Rightarrow F_2 = \frac{P_2}{v_2}$



$P = (F_1 + F_2) \cdot v$

$\Rightarrow v = \frac{P}{F_1 + F_2}$

! Obs

$F = F_1 + F_2 \quad | \cdot d$

$F \cdot d = F_1 d + F_2 \cdot d \quad | \cdot \frac{1}{\Delta t}$

$\frac{F \cdot d}{\Delta t} = \frac{F_1 \cdot d}{\Delta t} + \frac{F_2 \cdot d}{\Delta t}$

$P = P_1 + P_2$

$$v = \frac{P_1 + P_2}{\frac{P_1}{v_1} + \frac{P_2}{v_2}}$$

$$v = \frac{(P_1 + P_2) \cdot v_1 v_2}{P_1 v_2 + P_2 v_1}$$